ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 09/12/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1		T2		P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).
Su examen se mostrará una vez corregido.

T1) a. Sea $F: R^3 \to R$ un campo escalar diferenciable y $\vec{\gamma}: (0, +\infty) \to R^3 \ / \ \vec{\gamma}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ una curva regular parametrizada en R^3. Muestre que si $F(\vec{\gamma}(u))$ es constante, entonces la dirección de crecimiento más rápido de F en cada punto de la curva es ortogonal a la dirección tangente a la curva.

b. Compruebe la afirmación en el item a) para $F(x, y, z) = 3x^2y - 3yz$ y $\vec{\gamma}(u) = (u, -u^2, u^2)$ en el punto (2,–4,4)

T2) a. Defina función potencial para un campo $\vec{f}: R^2 \to R^2$.

b. Sabiendo que el campo $\vec{f}(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ admite función potencial $\emptyset$ en $A = \{(x, y) \in R^2 \ /y > 0\}$ y además $\emptyset(1,1) = \frac{\pi}{4}$. Determine la línea equipotencial que pasa por el punto (1,1).

P1) Sea β_0 el plano tangente a la superficie de ecuación $xyz + \ln(xyz) - z = 0$ en el punto $(x_0, y_o. z_0) = (1,1,1)$. Calculo el flujo del campo $\vec{f}(x, y, z) = (-xy + z\ , \frac{xy}{2}\ , xy - 2z + 4)$ a través de la porción de plano β_0 incluida en el primer octante. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para el plano.

.

P2) Para el campo vectorial $\vec{f}(x, y, z) = (3x + yz\ , xye^{-xz}, e^{-xz})$ calcule el flujo de $\vec{f}$ a través de la porción de superficie dada por $z = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$ que está sobre el plano *xy* orientada con el vector normal apuntando hacia el semieje *z* positivo.

P3) Calcule la circulación del campo $\vec{f}(x, y) = (-3y + xe^{-2x}\ , ye^{-3y+1} - 3x + x^2)$, a lo largo de la curva C frontera de la región plana $D = \{(x, y) \in R^2 \ \ x^2 + y^2 \leq 2x\ \ ,\ \ y \geq x - 1\}$ recorrida en sentido negativo.

P4) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} y_G$, si y_G es la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

AM2	Final	HOJA Nº 1/3 FECHA 9-12-25

T1 a) Sea $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable y $\gamma: (0,+\infty)$ / $\bar{\gamma}(u) = (x(u), y(u), z(u))$ una curva regular parametrizada en $\mathbb{R}^3$. Mostrar que si $F(\bar{\gamma}(u))$ es constante, entonces la dirección de crecimiento más rápido de F en cada punto de la curva es ortogonal a la dirección tangente a la curva.

• $C: \bar{\gamma}(u)$ es regular $\Rightarrow \bar{\gamma}'(u) \neq (0,0,0) \quad \forall u \in (0,+\infty)$

$$\bar{\gamma}'(u) = (x'(u), y'(u), z'(u))$$

• La dirección de máximo crecimiento de F es $\bar{\nabla} F(x,y,z)$

• Dos vectores son perpendiculares si el producto escalar es nulo

$$v_1 \perp v_2 \iff v_1 \cdot v_2 = 0 \quad \text{con } v_1, v_2 \neq \bar{0}$$

$F(\bar{\gamma}(u)) = k$ (constante) $\Rightarrow C: \bar{\gamma}(u)$ es parte de una curva de nivel y las curvas de nivel son $\perp$ a ∇F

derivo en u

$F(\bar{\gamma}(u)) \Rightarrow$ hallo el gradiente (uso R.C) porque F es diferenc.

$$\bar{\nabla} F(\bar{\gamma}(u)) \cdot \underbrace{\bar{\gamma}'(t)}_{\neq \bar{0}} = 0$$

$$\boxed{\bar{\nabla} F(\bar{\gamma}(u)) \perp \gamma'(t)}$$

b) Comprobar la afirmación en el ítem a) para

$F(x,y,z) = 3x^2y - 3yz$, $\bar{\gamma}(u) = (u, -u^2, u^2) \to \bar{\gamma}'(u) = (1, -2u, 2u)$

$F(\bar{\gamma}(u)) = 3u^2 \cdot (-u^2) - 3(-u^2)u^2 = -3u^4 + 3u^4 = 0 \to$ constante

$\bar{\nabla} F(x,y,z) = (6xy, 3x^2 - 3z, 3y) \to \bar{\nabla} F(\bar{\gamma}(u)) = (6u(-u^2), 3u^2 - 3u^2, 3(-u^2))$

$$\bar{\nabla} F(\bar{\gamma}(u)) = (-6u^3, 0, -3u^2)$$

$$\bar{\nabla} F(\bar{\gamma}(u)) \cdot \bar{\gamma}'(u) = (-6u^3, 0, -3u^2)(1, -2u, 2u) = -6u^3 + 0 - 6u^3 = \boxed{0} \checkmark$$

NOTA

T2 a) Definir función potencial para un campo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\bar{f}$ admite función potencial si $\bar{f} = (P, Q)$ ∧ $P'_y = Q'_x$ y $\bar{f}$ es campo vectorial derivable con continuidad en el dominio de la función

Entonces $\exists \varphi \,/\, \bar{f}_{(x,y)} = \bar{\nabla}\varphi_{(x,y)} \Rightarrow \begin{matrix} P = \varphi'_x \\ Q = \varphi'_y \end{matrix}$

b) Sabiendo que el campo $\bar{f}_{(x,y)} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ admite función potencial ϕ en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > 0\}$ y, además $\phi_{(1,1)} = \frac{\pi}{4}$. Determinar la línea equipotencial que pasa por el punto $(1,1)$

ϕ función potencial $\Rightarrow$ l. equip: $\varphi_{(x,y)} = k \qquad k \in \mathbb{R}$

Hallo φ:

$$\begin{cases} \phi'_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{Integro en } x} \phi_{(x,y)} = -\cancel{y} \cdot tg^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) \cdot \dfrac{1}{\cancel{y}} + \alpha(y) \\ \phi'_y = \dfrac{x}{x^2+y^2} \; ⊛ \qquad \phi_{(x,y)} = -tg^{-1}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \alpha(y) \end{cases}$$

$$u = \frac{x}{y} \to du = \frac{-x}{y^2}\,dy$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{x}{y^2}$$

$$h(u) = -\underbrace{tg^{-1}(u)}$$

$$h'_u = -\frac{1}{1+u^2} \, \frac{du}{dy} \overset{c.v}{=} -\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{\frac{y^2+x^2}{\cancel{y^2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{y^2}}$$

$$\overset{⊛}{\phi_{(x,y)}} = \frac{x}{x^2+y^2} + c = \frac{x}{x^2+y^2} \to c = 0$$

$$\boxed{\phi_{(x,y)} = -tg^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c}$$

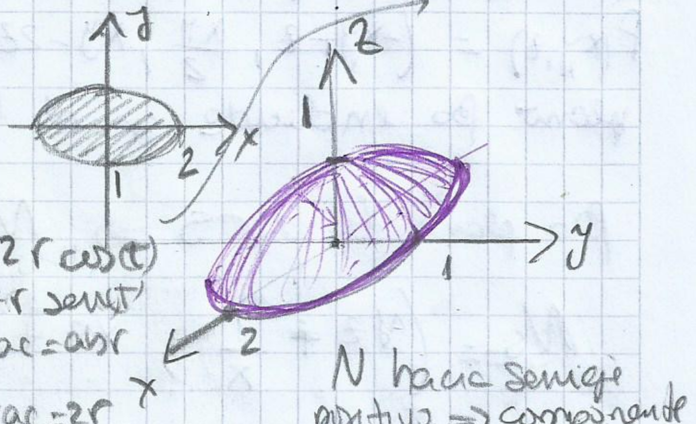
l.e $\to \phi_{(x,y)} = k \Rightarrow$ en $(1,1)$

$$\phi_{(1,1)} = \underbrace{-tg^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)}_{-\frac{\pi}{4}} + c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \longrightarrow -tg^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x}{y} = \underbrace{tg\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{1} \to \boxed{y = x}$$

(P2) Para el campo vectorial $\bar{f}(x,y,z) = (3x + y^2, xye^{-xz}, e^{-xz})$ calcular el flujo de $\bar{f}$ a través de la porción de sup. dada por $z = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$ que está sobre el plano xy orientada con el vector normal apuntando al semieje z positivo. $\rightarrow z = 1 - r^2$

S: $\begin{cases} z = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2 \rightarrow \text{paraboloide elíptico invertido} \\ \text{sobre el plano xy} \Rightarrow z \geq 0 \end{cases}$



$\begin{cases} x = 2r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$ jac = abr

jac = 2r

en $z = 0 \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{4} + y^2$ $\rightarrow b = 1$, $\rightarrow a = 2$

N hacia semieje positivo $\Rightarrow$ componente z de la normal −

$$\underbrace{\iint_S \bar{f}\, d\bar{s}}_{\text{orientada hacia eje } z^+} = -\iint_{S_{\text{con } z^+}} \bar{f}\, d\bar{s}$$

$\rightarrow$ orientada con Normal hacia arriba (alejándose del eje z)

Agrego una tapa, hallo el flujo con normal saliente y después cambio el signo.

$N_{Tapa} = (0,0,-1)$

$$\oiint_{S \cup T} \bar{f}\, d\bar{s} = \iint_S \bar{f}\, d\bar{s} + \iint_T \bar{f}\, d\bar{s} \quad ⊛$$

↳ x Gauss: $\oiint_{S \cup T} \bar{f}\, d\bar{s} = \iiint_W \mathrm{div}(\bar{f})\, dvol$

$$\mathrm{div}(\bar{f}) = 3 + \cancel{xe^{-xz}} - \cancel{xe^{-xz}} = 3$$

$$\oiint_{S \cup T} \bar{f}\, d\bar{s} = 3 \iiint_W dvol \overset{C.V.}{=} 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} \underbrace{2r}_{jac}\, dz\, dr\, dt =$$

$$= 3 \underbrace{\int_0^{2\pi} dt}_{2\pi} \underbrace{\int_0^1 2r(1-r^2)\, dr}_{1/2} = \boxed{3\pi = \oiint_{S \cup T} \bar{f}\, d\bar{s}}$$

$$T: \iint_T \bar{f}\, d\bar{s} = \iint_{T_{xy}} \bar{f}\, N_T\, dx\, dy = \iint_{T_{xy}} (3x + yz, xye^{-xz}, e^{-xz})(0,0,-1)\, dx\, dy =$$

$\boxed{\text{Área elipse} = ab\pi}$

$$= \iint_{T_{xy}} -e^{-xz}\, dx\, dy \overset{z=0}{=} -1 \overbrace{\iint_{T_{xy}} dx\, dy}^{\text{área } T_{xy}} = -2\pi$$

$$⊛ \iint_S \bar{f}\, d\bar{s} = 3\pi - (-2\pi) = 5\pi \longrightarrow \boxed{\iint_S \bar{f}\, d\bar{s} = -5\pi}$$

Orientada al eje z^+

AM2	Final	HOJA N° 2/3
		FECHA 9-12-25

(P1) Sea p_0 el plano tangente a la sup. de ec. $\overset{S}{\overbrace{xyz + \ln(xyz) - z = 0}}$ en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$. Calcular el flujo del campo $\bar{F}(x,y,z) = \left(-xy+z, \frac{xy}{2}, xy - 2z + 4\right)$ a través de la porción de plano p_0 incluida en el 1° octante. Indicar la orient.

p_0 plano tg de $S \Rightarrow N_{PT} \parallel N_S \Rightarrow N_{PT} = k\, N_S$

tomo $k = 1$

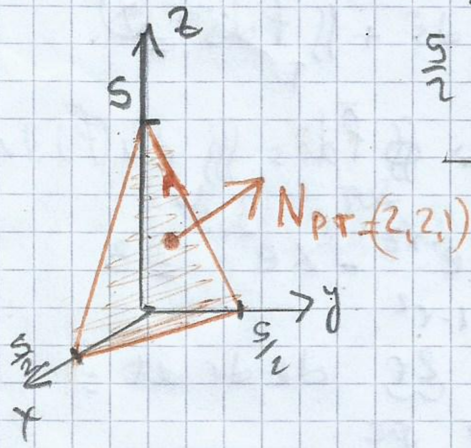
$$N_S = \left(yz + \frac{1}{x},\ xz + \frac{1}{y},\ xy + \frac{1}{z} - 1\right)$$

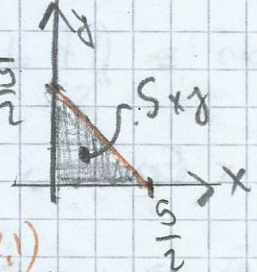
$$N_{S(1,1,1)} = (2, 2, 1) \longrightarrow \boxed{N_{PT} = (2,2,1)}$$

Ec. pl. tangente: $N \cdot (x,y,z) = N \cdot P \longrightarrow P = (1,1,1)$

$$\boxed{2x + 2y + z = 5}$$

en $y = z = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$ en $x = z = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2}$, en $x = y = 0 \rightarrow z = 5$





$$\iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_S \bar{F}\, \breve{n}\, ds = \ldots$$

$$= \iint_{S_{xy}} \bar{F}\, n\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} \left(-xy+z, \frac{xy}{2}, xy - 2z + 4\right)(2,2,1)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{S_{xy}} -\cancel{2xy} + \cancel{2z} + \cancel{xy} + \cancel{xy} - \cancel{2z} + 4\, dx\,dy = 4 \underbrace{\iint_{S_{xy}} dx\,dy}_{\text{Área } S_{xy}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\boxed{\iint_S \bar{f}\, d\bar{s} = \frac{25}{2}}$$

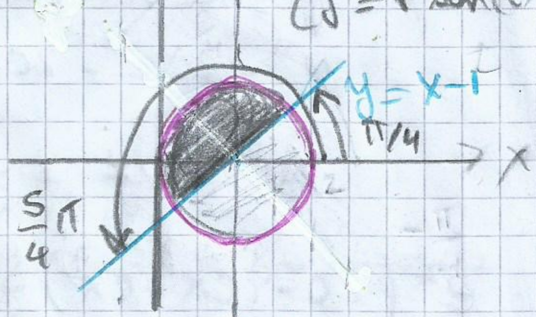
NOTA

AM2	Final	HOJA Nº 3/3 FECHA 9-12-25

(P3) Calcular la circ. del campo $\bar{f}(x,y) = \left(-3y + xe^{-2x},\ ye^{-3y+1} - 3x + x^2\right)$ a lo largo de la curva C frontera de la región plana D

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underbrace{x^2+y^2 \leq 2x}_{(x-1)^2+y^2 \leq 1},\ y \geq x-1\}$ recorrida en sentido negativo.

$\begin{cases} x = r\cos(t) + 1 \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \end{cases}$



C es curva FRONTERA de D simple y suave a trozos

D es una región compacta de $\mathbb{R}^2$

$\bar{F} = (P, Q)$, P y Q son sumas algebraicas de funciones elementales

$\bar{F} \in C^1$

Se cumplen las hip. $\Rightarrow$ T. Green: $\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_D (Q'_x - P'_y)\, dx\,dy =$

$$= \iint_D -3 + 2x - (-3)\, dx\,dy = 2 \iint_D x\, dx\,dy =$$

$$\overset{C.V.}{=} 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^1 \overset{Jac}{r} \cdot (r\cos(t) + 1)\, dr\, dt =$$

$$= 2 \int_{-\pi/4}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^1 r^2\cos(t) + r\, dr\, dt = 2 \int_{\pi/4}^{\frac{5}{4}\pi} \frac{1}{3}\cos(t) + \frac{1}{2}\, dt =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}(t) + \frac{t}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = 2 \cdot \left[-\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{5}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{\pi}{8} \right] =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l}$$

$$\boxed{\oint_{C^-} \bar{f}\, d\bar{l} = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$\cong -2{,}20$

NOTA

(P4) Calcular $\lim_{x\to+\infty} y_G$ si y_G es la sol. gral. de $y''+2y'+y=2e^{-x}$

SH) $y''+2y'+y=0$

$$\underbrace{r^2+2r+1}_{(r+1)^2}=0 \rightarrow \underset{\text{doble}}{r=-1} \rightarrow \boxed{y_H=Ae^{-x}+Bxe^{-x}}$$

$A,B,C\in\mathbb{R}$

SP) $y=Cx^2e^{-x}$

$y'=2Cxe^{-x}-Cx^2e^{-x}$

$y''=2Ce^{-x}-2Cxe^{-x}-2Cxe^{-x}+Cx^2e^{-x}$

$$y''+2y'+y=2e^{-x}$$

$$\cancel{e^{-x}}(2C-4Cx+Cx^2)+2\cancel{e^{-x}}(2Cx-Cx^2)+\cancel{e^{-x}}(Cx^2)=2\cancel{e^{-x}}$$

$$2C\cancel{-4Cx}\cancel{+Cx^2}\cancel{+4Cx}\cancel{-2Cx^2}\cancel{+Cx^2}=2$$

$$2C=2\rightarrow C=1$$

$$\boxed{y_P=x^2e^{-x}}$$

$$y_G=Ae^{-x}+Bxe^{-x}+x^2e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} Ae^{-x}+Bxe^{-x}+x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{A+Bx+x^2}{e^x}=$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{B+2x}{e^x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} y_G=0}$$

NOTA